



Liceo Statale "Jacopone da Todi"

TODI

PROGRAMMA SVOLTO DI MATEMATICA A.S. 2023/2024

Classe 5B Scientifico

Prof. Marco Biondini

Libro di testo: Colori della matematica Blu volumi 4 gamma e 5 gamma. Leonardo Sasso. Petrini.

Tema L: limiti e continuità.

- Limiti di funzioni reali di variabile reale.

Le funzioni continue e l'algebra dei limiti: la continuità e i limiti delle funzioni elementari. L'algebra dei limiti: teorema sull'algebra dei limiti (dimostrazione del limite di una somma e di un prodotto). Regole di calcolo dei limiti nel caso in cui uno dei due limiti sia infinito, aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito. Cambiamento di variabile nei limiti.

Forme di indecisione di funzioni algebriche: limiti di funzioni razionali intere e fratte con relative forme indeterminate ($\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$), limiti di funzioni irrazionali e relative forme indeterminate ($\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$).

Forme di indecisione di funzioni trascendenti: limiti notevoli di funzioni trascendenti (con dimostrazione di $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$) e relative generalizzazioni; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, sue generalizzazioni e formulazioni equivalenti; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$.

Infiniti e infinitesimi: definizione di infiniti, infinitesimi e rispettivo ordine. Confronto tra infinitesimi e infiniti, gerarchie degli infiniti.

- Continuità.

Continuità di una funzione in un punto (in un intorno completo e in un intorno sinistro e destro); continuità nel dominio, funzioni continue e relative operazioni. La continuità e funzione inversa, condizione di invertibilità per le funzioni continue. Punti singolari e loro classificazione. Proprietà delle funzioni continue: il teorema di esistenza degli zeri, teorema di Weierstrass e il teorema dei valori intermedi con relativi controesempi.

Asintoti: definizione e classificazione. Ricerca di asintoti di una funzione e grafico probabile.

Tema M: la derivata.

- La derivata.
Il problema della retta tangente. La derivata di una funzione in un punto e relativo significato geometrico. La funzione derivata e le derivate successive. Derivata destra e sinistra e definizione di funzione derivabile in un punto. Teorema che lega la derivabilità alla continuità di una funzione (con dimostrazione). Le derivate delle funzioni elementari: costante, potenza, identità, esponenziale, logaritmica, seno e coseno (con relative dimostrazioni). L'algebra delle derivate: la linearità della derivata (con dimostrazione), la derivata del prodotto (con dimostrazione), del quoziente (con dimostrazione) e della funzione reciproca. Derivata della funzione composta e della funzione inversa, le derivate delle funzioni goniometriche inverse. Punti di non derivabilità e loro classificazione, studio della derivabilità di una funzione in un punto; limite della derivata. Le applicazioni geometriche del concetto di derivata: retta tangente ad una curva e tangenza fra due curve. Il differenziale di una funzione.
- Teoremi sulle funzioni derivabili.
Punti di massimo e di minimo relativi e assoluti. Il teorema di Fermat (con dimostrazione), definizione di punto stazionario. Teorema di Rolle (con dimostrazione) e di Lagrange (con dimostrazione). Corollari del teorema di Lagrange. Criterio di monotonia per le funzioni derivabili (con dimostrazione) e analisi dei punti stazionari in base alla derivata prima. Analisi dei punti stazionari in base alla derivata seconda. I problemi di ottimizzazione: massimi e minimi assoluti nel caso di intervallo chiuso e limitato e di intervallo non chiuso o non limitato; problemi di massimo e di minimo. Convessità e concavità di funzioni, criterio di concavità e convessità per le funzioni derivabili due volte. Punti di flesso e loro classificazione. Condizione necessaria per l'esistenza di un punto di flesso. I teoremi di Cauchy e di de L'Hopital e relative applicazioni nel calcolo dei limiti in forma indeterminata.
- Lo studio di funzione.
Studi di funzioni algebriche razionali e irrazionali, trascendenti esponenziali, logaritmiche e goniometriche. Studi di funzioni in valori assoluti. Relazioni tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata.

Tema N: calcolo integrale ed equazioni differenziali.

- Gli integrali indefiniti.
Definizione di primitiva di una funzione e relativa caratterizzazione delle primitive. Definizione di integrale indefinito. Integrali immediati. La linearità dell'integrale indefinito. Integrazione di funzioni composte e per sostituzione. Integrazione per parti (con dimostrazione). Integrazione di funzioni razionali frazionarie. Relazioni tra il grafico di una funzione e quello di una sua primitiva.
- Gli integrali definiti.
Concetto di integrale definito: somma di Riemann e definizione di integrale definito. Interpretazione geometrica dell'integrale definito. Le proprietà degli integrali definiti: linearità, additività, monotonia e valore medio di una funzione. Teorema del valore medio per gli integrali (con dimostrazione). Definizione di funzione integrale, teorema fondamentale del calcolo o di Torricelli-Barrow (con dimostrazione), formula fondamentale del calcolo integrale o di Newton-Leibniz (con dimostrazione). Calcolo di integrali definiti con

cambiamenti di variabile. Applicazioni geometriche degli integrali definiti: calcolo di aree, area di una regione limitata dal grafico di due funzioni, il calcolo dei volumi dei solidi con il metodo delle sezioni, volumi dei solidi di rotazione attorno all'asse x e all'asse y. Funzioni integrabili, integrali impropri su intervalli limitati e illimitati. Cenni di integrazione numerica: metodo dei rettangoli e dei trapezi.

Tema H: geometria euclidea e analitica dello spazio.

- Geometria analitica dello spazio (cenni).

Il sistema di riferimento ortogonale nello spazio, distanza fra due punti. L'equazione di un piano e le condizioni di parallelismo e perpendicolarità fra due piani. L'equazione di una retta nello spazio e le condizioni di parallelismo e perpendicolarità fra due rette e fra una retta e un piano. La distanza di un punto da una retta e la distanza di un punto da un piano. La superficie sferica, relativa equazione in forma cartesiana.

N.B. La parte di geometria analitica dello spazio è stata trattata nelle prime due settimane del mese di maggio senza avere il necessario tempo per compiere un approfondito studio e svolgere applicazioni complesse. Sono stati comunque affrontati i concetti fondamentali presentando le relative formule al fine di consentire agli studenti di poter svolgere eventuali quesiti della seconda prova d'esame.

Todi, 31 Maggio 2024

L'insegnante

Marco Biondini